Задания типа B10 из открытого банка

Задания типа B10 предполагают проверку умения применять полученные школьником знания в практической деятельности и повседневной жизни. В задачах этого типа описывается близкая к реальной ситуация, которую надо смоделировать. Решение таких задач состоит из трех шагов.

1. Необходимо описать ситуацию математически, т.е. составить по условию задачи уравнение или неравенство, описывающее свойства тех или иных объектов или процессов, описанных в задании. Отметим, что здесь не требуется никаких специальных знаний – нужен только здравый смысл.

2. Решить составленное уравнение или неравенство. Как правило, здесь возникают квадратные или рациональные уравнения или неравенства, довольно простые, но иногда требующие определенной изобретательности. Дело в том, что числовые коэффициенты в уравнения и неравенствах могут быть «не очень хорошими», так что, например, вычисление дискриминанта квадратного уравнения без калькулятора может быть сложной задачей. Здесь надо помнить, что все задачи могут быть решены без калькулятора, просто надо напрячь воображение и увидеть, на что можно умножить, разделить и т.п., чтобы получить «хорошие числа».

3. Наконец из полученного решения надо выбрать то, которое требуется записать в ответ. Здесь надо быть внимательным, еще раз точно понять, что требуют найти в задании и помнить о физическом смысле величин, фигурирующих в задаче. Так, температура в градусах Кельвина, сопротивление и т.п. – неотрицательные величины.

Ниже приведены решения восьми разных по содержанию задач, представленных в открытом банке заданий ЕГЭ по математике. На сегодняшний день этим исчерпывается все разнообразие задач типа B10.

№6079. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. руб.) задаётся формулой: $q = 210 - 15p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = p \cdot q$ составит не менее 360 тыс. руб.

Решение. Подставив в соотношение $r = p \cdot q$, определяющее выручку, выражение $q = 210 - 15p$, получим: $r = p \cdot (210 - 15p)$. Значение выручки составит не менее 360 тыс. руб. если выполнено неравенство $r \geqslant 360$ или $p \cdot (210 - 15p) \geqslant 360$. Решим это неравенство.

$$p \cdot (210 - 15p) \geqslant 360,$$
$$15p^2 - 210p + 360 \leqslant 0,$$
$$p^2 - 14p + 24 \leqslant 0,$$
$$(p-2) \cdot (p-12) \leqslant 0,$$
$$p \in [2;\, 12].$$

Таким образом, наибольшее значение цены p, удовлетворяющее условию задачи, составит 12 тыс. руб.

Ответ: 12.

№6089. Модель камнеметательной машины выстреливает камни под определенным углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Её конструкция такова, что траектория полета камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$, где $a = -\frac{1}{12000}$ м$^{-1}$, $b = \frac{1}{15}$ – постоянные параметры. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высоты 10 м нужно расположить машину, чтобы камни перелетали через неё?

Решение. Для того чтобы камни перелетали через 10-ти метровую стену, необходимо, чтобы ордината траектории полета была не меньше 10, то есть выполнялось неравенство: $y \geqslant 10$ или $ax^2 + bx \geqslant 10$. Наибольшее решение этого неравенства и есть то наибольшее расстояние от стены, которое надо определить.

Решим неравенство $ax^2 + bx \geqslant 10$, подставив в него из условия задачи коэффициенты $a = -\frac{1}{12000}$ и $b = \frac{1}{15}$:

$$-\frac{1}{12000}x^2 + \frac{1}{15}x \geqslant 10,$$

$$-x^2 + 800x \geqslant 120000,$$

$$x^2 - 800x + 120000 \leqslant 0,$$

$$(x-200)(x-600) \leqslant 0,$$

$$x \in [200;\ 600].$$

Таким образом, наибольшее расстояние от крепостной стены, удовлетворяющее условию задачи, составит 600 метров.

Ответ: 600.

№6111. В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону

$$H(t) = 1,8 - 0,96t + 0,128t^2,$$

где t – время в минутах. В течение какого времени вода будет вытекать из бака?

Решение. Вода будет вытекать из бака до тех пор, пока она есть в этом баке (поскольку отверстие у дна). Другими словами, пока высота столба воды в баке не станет равной нулю, т.е. $H(t) = 0$ или

$$1,8 - 0,96t + 0,128t^2 = 0.$$

Вычислить дискриминант такого уравнения без калькулятора – не очень легкая задача, поэтому поступим так: умножим обе части уравнения на 20, получим:

$$2,56t^2 - 19,2t + 36 = 0.$$

Если присмотреться, то в левой части стоит полный квадрат:

$$(1,6t - 6)^2 = 0,$$

откуда $t = \dfrac{6}{1,6} = 3,75$. Таким образом, через 3,75 мин. вода вытечет.

Ответ: 3,75.

№6115. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задаётся выражением

$$T(t) = T_0 + at + bt^2,$$

где $T_0 = 1160$ К, $a = 34$ К/мин, $b = -0,2$ К/мин^2. Известно, что при температурах нагревателя свыше 2000 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах) через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

Решение. Прибор надо отключать, если его температура станет выше 2000 К, т.е. $T(t) > 2000$ или $T_0 + at + bt^2 > 2000$. Подставляя в последнее неравенство значения $T_0 = 1160$, $a = 34$, $b = -0,2$, будем иметь:

$$1160 + 34t - 0,2t^2 > 2000,$$
$$0,2t^2 - 34t + 840 < 0,$$
$$t^2 - 170t + 4200 < 0,$$
$$(t-30)(t-140) < 0,$$
$$t \in (30;\, 140).$$

Таким образом, как минимум через 30 минут, температура нагревательного элемента станет больше 2000 К, поэтому его надо выключить не позднее чем через 30 минут.

Ответ: 30.

№6137. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется формулой $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не менее 80%, если температура холодильника $T_2 = 400$?

Решение. Условие задачи будет выполнено тогда и только тогда, когда $T_2 = 400$ и выполнено неравенство $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \geqslant 0,8$, т.е.

$$\frac{T_1 - 400}{T_1} \geqslant 0,8.$$

Решим это рациональное неравенство:

$$\frac{T_1 - 400}{T_1} - 0,8 \geqslant 0,$$

$$\frac{T_1 - 400 - 0,8T_1}{T_1} \geqslant 0,$$

$$\frac{0,2T_1 - 400}{T_1} \geqslant 0,$$

$$\frac{T_1 - 2000}{T_1} \geqslant 0.$$

Таким образом, решение неравенства: $T_1 \in \left(-\infty; 0\right) \cup \left[2000; +\infty\right)$. В задаче предполагается, что температура не может быть отрицательной (шкала Кельвина), поэтому наименьшее значение температуры, удовлетворяющее условию задачи, равно 2000.

Ответ: 2000.

№6147. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 100 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите (в омах) наименьшее возможное сопротивление электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление даётся формулой $R=\dfrac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 20 Ом.

Решение. Пусть $R_1=100$ Ом – общее сопротивление приборов, R_2 – сопротивление обогревателя, $R=\dfrac{100\cdot R_2}{100+R_2}$ – общее сопротивление сети. Так как общее сопротивление в сети должно быть не меньше 20 Ом, то

$$R\geqslant 20 \text{ или } \frac{100\cdot R_2}{100+R_2}\geqslant 20,$$

$$\frac{100\cdot R_2-2000-20R_2}{100+R_2}\geqslant 0,$$

$$\frac{80\cdot R_2-2000}{100+R_2}\geqslant 0,$$

$$\frac{R_2-25}{100+R_2}\geqslant 0.$$

$$R_2\in(-\infty;-100)\cup[25;+\infty).$$

Таким образом, поскольку сопротивление не может быть отрицательным, то наименьшее значение сопротивления электрообогревателя R_2 составляет 25 Ом.

Ответ: 25.

№6169. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана — Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела вычисляется по формуле: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$, площадь S поверхности измеряется в квадратных метрах, температура T – в градусах Кельвина, а мощность – в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{16} \cdot 10^{14}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $0,57 \cdot 10^{15}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды (в градусах Кельвина).

Решение. Выразим из формулы $P = \sigma S T^4$ температуру T через величины P, σ, S:

$$T^4 = \frac{P}{\sigma S},$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma S}}.$$

Поскольку температура T возрастает с увеличением мощности P, то минимальная температура звезды будет соответствовать значению $P = 0,57 \cdot 10^{15}$:

$$T = \sqrt[4]{\frac{0,57 \cdot 10^{15}}{5,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{16} \cdot 10^{14}}} = \sqrt[4]{\frac{16 \cdot 10^{15}}{10 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{14}}} = \sqrt[4]{16 \cdot 10^{8}} = 2 \cdot 10^2 = 200.$$

Ответ: 200.

№6189. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой
$h(t) = -5t^2 + 18t$ (h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров.

Решение. Условие задачи будет выполнено тогда и только тогда, когда $h(t) \geqslant 9$, т.е.

$$-5t^2 + 18t \geqslant 9,$$
$$5t^2 - 18t + 9 \leqslant 0.$$

Находим дискриминант $D = 18^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9 = 324 - 180 = 144$. Корни квадратного трехчлена $5t^2 - 18t + 9$ равны 0,6 и 3. Итак, решением неравенства $5t^2 - 18t + 9 \leqslant 0$ является промежуток $[0,6;\, 3]$. Именно в этот временной интервал, длившийся 2,4, секунды камень был на высоте не менее 9 метров.

Ответ: 2,4.